1.3 Una partícula realiza un movimiento rectilíneo definido por la ecuación:

$\boldsymbol{x(t) = 2t^3 - 6t^2 + 28t - 10}$, donde *x* se expresa en metros y *t* en segundos. Calcular:

(a) ¿Es este un movimiento uniformemente acelerado?
(b) Calcular la velocidad y aceleración en función del tiempo.
(c) El o los instantes de tiempo y las correspondientes posiciones en la cual la partícula tendrá velocidad nula.
(d) La posición, velocidad y aceleración cuando $\boldsymbol{t = 0}$ s.
(e) En qué intervalos de tiempo el movimiento es acelerado y en cuáles desacelerado.

En este problema se nos proporciona directamente la posición en la coordenada *x* en función del tiempo. Lo primero que hay que notar que si la comparamos con la ecuación de un MRUV, tenemos un término de más: el término que va con t^3 Entonces, el movimiento que describe la partícula no es uniformemente acelerado, sino que la aceleración varía con el tiempo (punto a).

Cuando tenemos este tipo de problemas no podemos usar las ecuaciones de MRUV y debemos recurrir a ecuaciones más básicas para la velocidad y la aceleración. La velocidad la podemos calcular de la derivada de la posición con respecto al tiempo y la aceleración de la derivada segunda de la posición respecto al tiempo. Entonces:

$v(t) = 6t^2 - 12t + 28$ [m/s]

$a(t) = 12t - 12$ [m/s^2]

Tengamos en cuenta que cuando se deriva aparece la unidad respecto de lo que estamos derivando en el cociente; por eso tenemos m/s y m/s^2 (punto b).

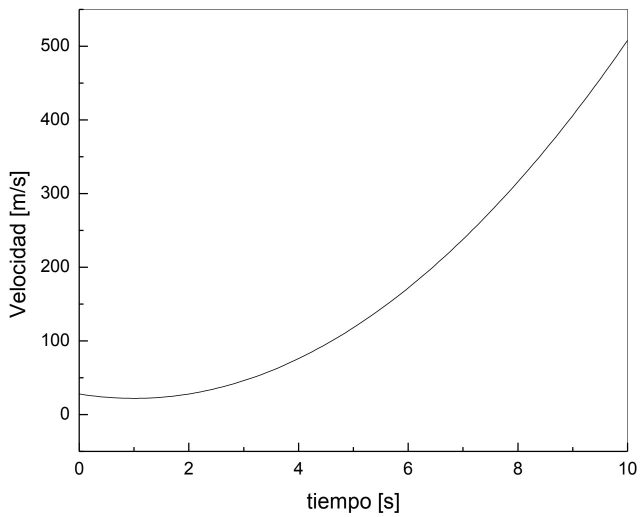
Para encontrar los instantes en que la velocidad es nula (o cero) entonces debemos encontrar los tiempos para los cuales, en la ecuación de la velocidad, $v = 0$.

De esta manera nos queda la ecuación

$0 = 6t^2 - 12t + 28$

Esta es una función cuadrática que se puede resolver usando la ecuación que determina las raíces de un polinomio de segundo grado, a veces llamada fórmula de Bhaskara.

Entonces la solución en este caso sería $t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-672}}{12}$. Sin embargo el argumento de la raíz es negativo por lo tanto esta ecuación no tiene raíces reales. Esto es fácil de visualizar si se grafica la velocidad en función del tiempo, y se observa que la velocidad es siempre positiva, nunca menor que cero.



Entonces la velocidad nunca es cero (punto c).

Para determinar la velocidad a los 10 segundos debemos reemplazar dicho valor en las ecuaciones correspondientes (punto d):

$x(t = 10s) = 2(10s)^3 - 6(10s)^2 + 28(10s) - 10 = 1670\,m$

$v(t = 10s) = 6(10s)^2 - 12(10s) + 28 = 508\,m/s$

$a(t = 10s) = 12(10s) - 12 = 108\,m/s$

Llamamos a un movimiento acelerado cuando la aceleración es positiva y desacelerado cuando es negativa. Para determinar cuándo la aceleración es negativa se plantea:

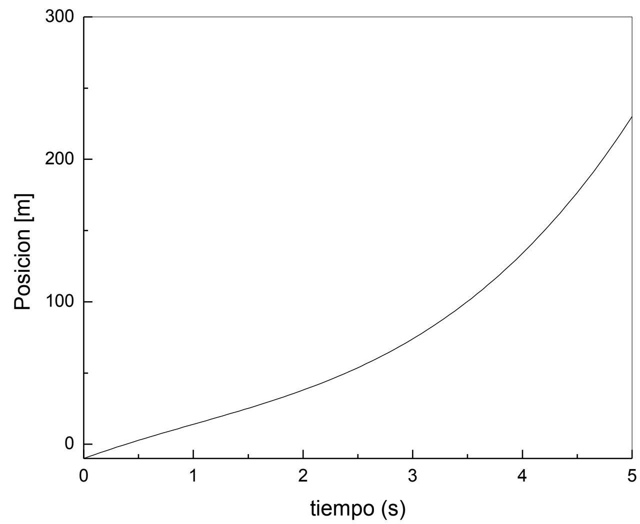
$a(t) = 12t - 12 < 0$

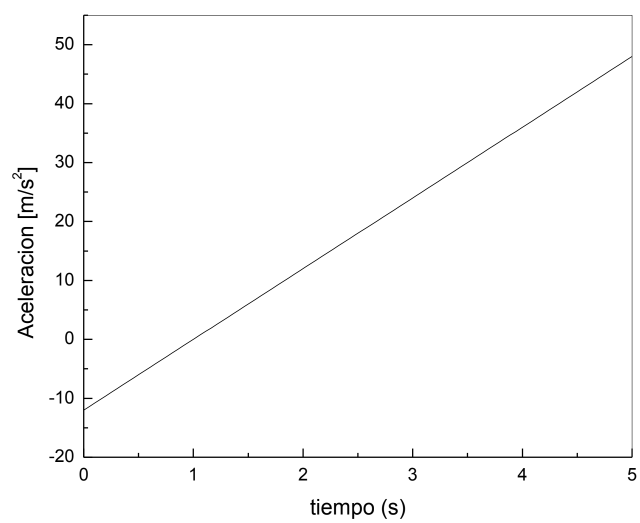
$12t < 12$

$t < 1$

Entonces, el valor de la aceleración es negativo en el intervalo de tiempo entre 0 y 1 segundos. Para 1 segundo la aceleración es cero y para tiempos mayores a 1 segundo la aceleración es positiva (punto d).

Abajo se presentan los gráficos de la posición y la aceleración en función del tiempo. Notar que en el gráfico de la posición la misma siempre aumenta con el tiempo, aunque en algunas partes de manera más pronunciada que en otras. En particular la pendiente, siempre positiva, es mínima en 1 segundo, como se observa del mínimo de la velocidad en función del tiempo. También se puede notar que la posición es negativa en los primeros instantes, es decir el movimiento parte desde una posición negativa respecto al origen.


300
200
100
0
Posicion [m]
0
1
2
3
4
5
tiempo (s)


50
40
30
20
10
0
-10
-20
Aceleracion [m/s2]
0
1
2
3
4
5
tiempo (s)

1.11. El capitán de un barco dispara verticalmente hacia arriba una luz de bengala verde, y un segundo después otra roja. Ambas parten del un mismo punto con una velocidad de 20 m/s moviéndose libremente.

Hallar la posición y velocidad de la bengala verde, cuando la roja alcanza su altura máxima.

Determinar a qué altura, con respecto al nivel de partida, se cruzan ambas.

Graficar $\boldsymbol{y = f(t)}$, $\boldsymbol{v = f(t)}$ y $\boldsymbol{a = f(t)}$, para ambas luces, mientras están en el aire.

Este es un problema donde dos cuerpos se mueven en la misma dirección partiendo desde el mismo punto con la misma velocidad pero en instantes diferentes. La primera pregunta que debemos plantearnos es ¿es posible que estos cuerpos se encuentren (choquen)? Para eso debemos tener en cuenta que aunque los dos parten con la misma velocidad y del mismo punto, lo hacen en instantes diferentes y **en presencia de la aceleración de la gravedad, que en este caso tiene dirección opuesta a la velocidad inicial**, es decir desacelera el movimiento. Entonces, podemos imaginarnos que cuando la primera bengala llega a su altura máxima y comienza a caer la otra sigue subiendo y es posible que exista un tiempo en donde las dos estén en el mismo punto.

¿Qué pasaría si las dos hubieran sido lanzadas en el mismo instante? Harían todo el trayecto juntas.

¿Qué pasaría si en lugar de hacia arriba se hubieran lanzado hacia abajo (obviamente desde un punto elevado)? La que partió primero siempre iría “adelante” de la que partió después y las dos aumentaría su velocidad: no se encontrarían nunca en el mismo lugar y al mismo tiempo.

Hecho este análisis, planteamos las ecuaciones de movimiento en el eje y para la bengala verde y_v y para la bengala roja y_r, eligiendo el eje y positivo hacia arriba, por lo que el término de la gravedad será negativo.

$$y_v = y_{0v} + v_{0y}(t - t_{0v}) - \frac{1}{2} g\,(t - t_{0v})^2 \qquad (1)$$

$$y_r = y_{0r} + v_{0y}(t - t_{0r}) - \frac{1}{2} g\,(t - t_{0r})^2 \qquad (2)$$

Tomamos el origen del eje y, es decir el cero de coordenadas en el punto desde donde parten las bengalas. Entonces las posiciones iniciales y_{0v} e y_{0r} son iguales a cero.

Ambas velocidades iniciales las escribimos como v_{0y} ya que en este caso son iguales.

Respecto a los tiempos iniciales, como una bengala parte antes que la otra el tiempo inicial no puede ser igual para ambas. Usaremos $t_{0v} = 0$ y $t_{0r} = 1$ s. Podríamos haber usado otros tiempos siempre que la diferencia entre ellos fuera de 1 segundo.

Con estos datos reescribimos las ecuaciones anteriores

$$y_v = v_{oy}.t - \frac{1}{2} g\,(t)^2 \qquad (3)$$

$$y_r = v_{0y}(t - 1\,s) - \frac{1}{2} g\,(t - 1\,s)^2 \qquad (4)$$

Las ecuaciones de las velocidades de la bengala roja v_r y de la bengala verde v_v son las siguientes (notar que las velocidades instantáneas no son iguales a pesar de que las velocidades iniciales si lo son).

$$v_v = v_{0y} - gt \qquad (5)$$

$$v_r = v_{0y} - g\,(t - 1\,s) \qquad (6)$$

Si se quiere conocer en qué momento la bengala roja alcanza su máxima altura, es decir, su velocidad es 0, igualamos la ecuación (6) a 0, y despejamos t. Así encontramos el valor $t = 3.04\ s$.

Ahora se puede reemplazar el valor $t = 3.04\ s$ en las ecuaciones de la posición y velocidad de la bengala verde, ecuaciones (3) y (5). Los valores resultantes son:

$y_v = 15.49$ m

$v_v = -9.79$ m/s

Vemos que la velocidad es negativa, es decir la bengala verde está cayendo cuando la roja alcanza su mayor altura.

En el segundo inciso se pide el punto donde se cruzan las bengalas. Es decir, un problema de encuentro. Para resolverlo igualamos las posiciones de ambas bengalas, calculamos el tiempo donde se produce el encuentro y luego la posición de los cuerpos. Entonces

$$y_v = y_r$$

$$v_{oy}.t - \frac{1}{2}g\,(t)^2 = v_{0y}(t - 1\,s) - \frac{1}{2}g\,(t - 1\,s)^2$$

Notar que cuando se desarrolla el binomio al cuadrado en el término de la derecha queda: $t^2 - 2t + 1$. Entonces:

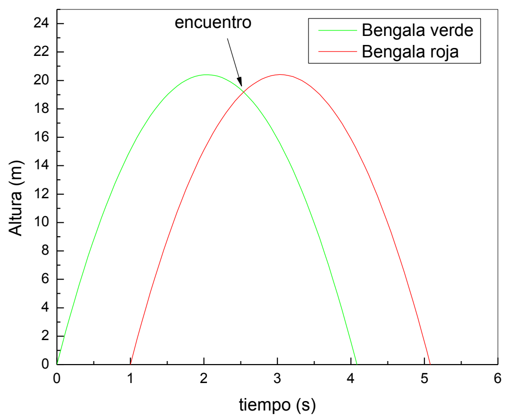
$$v_{oy}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 = v_{0y}\,.t - v_{0y}.\ 1\,s - \frac{1}{2}g\,t^2 + g\,.t.1\,s - \frac{1}{2}\,g\,.1s^2$$

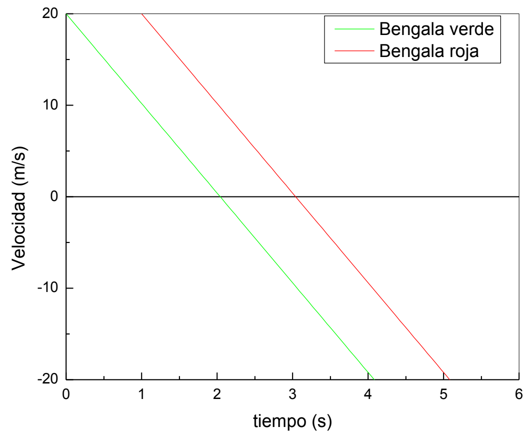
Cada uno de los términos tiene unidades de longitud. Los términos de la izquierda se simplifican con dos de los términos de la derecha. Si se reemplazan los valores numéricos para la velocidad y se despeja el tiempo se encuentra el valor $t = 2.54$ s.

Reemplazando este valor en la ecuación (3) o en la ecuación (4), se encuentra la posición para la cual se cruzan las bengalas:

$y_v = y_r = 19.2$ m

En el último punto se pide realizar una gráfica de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. Cabe aclarar que cuando se escribe por ejemplo y_v , en realidad se entiende que la misma depende del tiempo y se debería escribir $y_v(t)$, pero por simplicidad obviamos el (t). Abajo se presentan las gráficas.





De los gráficos de altura y velocidad en función del tiempo podemos ver:

- En el punto de encuentro (*t*=2,54s) la bengala verde tiene velocidad negativa y la roja positiva
- En el punto de máxima altura de la bengala roja, es decir cuando la velocidad de la misma es cero, la bengala verde tiene velocidad negativa.
- Cuando cualquiera de las dos bengalas llega de nuevo al piso (altura=0) ambas tienen una velocidad de -20 m/s, es decir igual a la inicial pero con el sentido contrario.